Течение Экмана - Куэтта при наличии малой вертикальной скорости.

Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.

Институт машиноведения УрО РАН, ул. Комсомольская, 34, г Екатеринбург, 620049, Россия.
Уральский Федеральный государственный университет, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, 620002, Россия.
alex55gor@mail.ru, evgen_pros@mail.ru

Введение

В работе [1] рассматривались классы точных решений уравнений Навье – Стокса, описывающие течения несжимаемой жидкости, компоненты скорости которой линейны по двум координатам. Решения такого типа будем называть неоднородными. В работе [2] рассматривались различные классы решений, используемых при исследовании течений невращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Показана возможность использования в частных случаях класса решений с отличной от нуля вертикальной компонентой скорости. Для исследования адвективных течений вращающейся несжимаемой жидкости Экман использовал класс решений, в котором горизонтальные компоненты скорости зависят только от вертикальной координаты, а вертикальная компонента скорости равна нулю. Давление и температура при этом ищутся в виде линейных функций горизонтальных координат. Решения такого типа будем называть однородным. В работах [3, 4-10] при исследовании адвективных течении вращающейся жидкости при различных физических условиях использовался класс однородных решений.

В докладе рассматривается применение класса неоднородных решений для описания течений вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Показано, что для неоднородного решения, описывающего слоистое течение (вертикальная компонента скорости равна нулю) условия совместности не выполняются, а решение является однородным. Соответственно, граничные условия должны соответствовать классу однородных решений и не содержать слагаемых, вызывающих появление неоднородных слагаемых скорости.

Решение задачи ищется в более широком классе неоднородных решений с учетом малой вертикальной компоненты скорости. Считается, что отклонения от однородного решения малы и можно использовать методы малого параметра. В качестве малого параметра используется отношение масштабов вертикальной и горизонтальной компонент скорости жидкости.

Методом малого параметра построены первые приближения неоднородных решений задачи с учетом сдвиговых компонент скорости. На каждом шаге решения интегрируется система обыкновенных дифференциальных уравнений в квазиполиномах переменной z .

1. Постановка задачи

Рассматривается изотермическое течение (типа Куэтта) вращающейся вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат. Вектор угловой скорости в проекциях на оси локальной системы координат имеет вид $\boldsymbol{\omega}=(0,\ \omega\cos\varphi,\ \omega\sin\varphi)$, где φ – широта места, ω – модуль угловой скорости вращения системы координат.

Система уравнений Навье-Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы Кориолиса [4, 5, 11, 12, 13, 14] в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Re}\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)+\frac{1}{\mathrm{Ek}}\left(\delta V_z\cos\varphi-V_y\sin\varphi\right)=-\mathrm{Re}\frac{\partial P}{\partial x}+\Delta V_x\\
\mathrm{Re}\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\frac{1}{Ek}V_x\sin\varphi=-\mathrm{Re}\frac{\partial P}{\partial y}+\Delta V_y\\
\mathrm{Re}\left(V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)-\frac{1}{\delta\mathrm{Ek}}V_x\cos\varphi=-\frac{\mathrm{Re}}{\delta^2}\frac{\partial P}{\partial z}+\Delta V_z\\
\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0
\end{gathered}\qquad(1)$$

Здесь V_x , V_y , V_z – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости, где V_h– характерный масштаб горизонтальных компонент скорости, масштаб вертикальной компоненты скорости выберем в виде $V_v=\delta V_h$; безразмерные горизонтальные координаты x, y определены характерным масштабом длины L, а поперечная координата z – толщиной слоя жидкости h; $\delta=h/L$ – отношение масштабов длины, ν – коэффициент кинематической (молекулярной) вязкости жидкости, Ek – число Экмана,

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$– оператор Лапласа в безразмерных переменных.

Граничные условия выберем следующие: на твердой поверхности, соответствующей z=0, выполняются условия проскальзывания:

$$a\left.\left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial V_x}{\partial z}+\delta\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right|_{z=0}=V_x(x,y,0)\qquad a\left.\left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial V_y}{\partial z}+\delta\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\right|_{z=0}=V_y(x,y,0)\qquad(2)$$

и условие непротекания: $V_z|_{z=0}$.=0 Предполагается, что толщина слоя жидкости меняется мало и ее изменением можно пренебречь.

На свободной поверхности, описываемой уравнением z=1 , задана сила $\boldsymbol{F}$ с компонентами $\boldsymbol{F}=(\tau_x,\tau_y,P_a)$. Компоненты силы τ_x, τ_y, задают касательные напряжения на свободной поверхности жидкости, моделирующие воздействие ветра:

$$\left.\left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial V_x}{\partial z}+\delta\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right|_{z=1}=\tau_x\qquad\left.\left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial V_y}{\partial z}+\delta\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\right|_{z=1}=\tau_y\qquad(3)$$

Будем считать, что касательные напряжения τ_x, τ_y являются линейными функциями горизонтальных координат: $\tau_x=\tau_{10}+x\tau_{11}+y\tau_{12}$ $\quad\tau_y=\tau_{20}+x\tau_{21}+y\tau_{22}$

Третья компонента силы $\boldsymbol{F}$ - давление атмосферы P_a. Давление задается квадратичной функцией:

$$P_a=P_0^0+xP_{10}^0+yP_{01}^0+x^2P_{20}^0+xyP_{11}^0+y^2P_{02}^0.\qquad(4)$$

2. Построение решения, описывающее адвективное течение.

Будем искать неоднородное решение в виде:

$$\begin{gathered}
V_x=U_0(z,\mu)+x\left(\varepsilon(z,\mu)+\gamma_1(z,\mu)\right)+y\left(\gamma_2(z,\mu)+\Omega(z,\mu)\right),\\
V_y=V_0(z,\mu)+x\left(\gamma_2(z,\mu)-\Omega(z,\mu)\right)+y\left(\varepsilon(z,\mu)-\gamma_1(z,\mu)\right),\\
V_z=W(z)\ ,\qquad(5)\\
P=P_0(z)+xP_{10}(z)+yP_{01}(z)+x^2P_{20}(z)+xyP_{11}(z)+y^2P_{02}(z)
\end{gathered}$$

Следующие переменные описывают деформацию элемента жидкости в горизонтальной плоскости: ε(z) - скорость изменения площади элемента жидкости в горизонтальной плоскости, Ω(z) - угловая скорость вращения элемента жидкости в горизонтальной плоскости,
$\gamma_1(z)=(U_1-V_2)/2$, $\gamma_2(z)=(U_2+V_1)/2$- компоненты девиатора тензора скоростей деформаций. После подстановки вида решения (5) в исходную систему уравнений (1) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения, описывающие скорость вертикального смещения слоя жидкости, изменения площади элемента жидкости и скорость вращения:

$$\begin{gathered}
W''(z)=-2\delta^2k^2U_0(z)ctg\varphi+\mathrm{Re}\left(\delta P_0'(z)+\delta^2W(z)W'(z)\right),\\
2\varepsilon(z)+W'(z)=0\ ,\\
\varepsilon''(z)=\delta^2k^2\Omega(z)+\delta^2\,\mathrm{Re}\left[P_{20}(z)+P_{02}(z)+\varepsilon^2(z)+\gamma_1^2(z)+\gamma_2^2(z)-\Omega^2(z)+W(z)\varepsilon'(z)\right],\\
\Omega''(z)=-2\delta^2k^2\varepsilon(z)+\mathrm{Re}\,\delta^2\left(W(z)\Omega'(z)-2\varepsilon(z)\Omega(z)\right).
\end{gathered}\qquad(6)$$

Здесь и далее штрихом обозначается производная функций по переменной z. Уравнения, описывающие сдвиговые слагаемые компонент скорости:

$$\begin{gathered}
\gamma_1''(z)=-2k^2\delta^2\gamma_2(z)+\mathrm{Re}\,\delta^2\left(P_{20}(z)-P_{02}(z)+2\varepsilon(z)\gamma_1(z)+W(z)\gamma_1'(z)\right),\\
\gamma_2''(z)=2\delta^2k^2\gamma_1(z)+\delta^2\,\mathrm{Re}\left(P_{11}(z)+2\varepsilon(z)\gamma_2(z)+W(z)\gamma_2'(z)\right).
\end{gathered}\qquad(7)$$

Уравнения градиентов давления

$$P_{10}'(z)=2\delta k^2ctg\varphi\frac{\varepsilon(z)+\gamma_1(z)}{\mathrm{Re}},\quad P_{01}'(z)=2\delta k^2ctg\varphi\frac{\gamma_2(z)+\Omega(z)}{\mathrm{Re}},\quad P_{20}'(z)=0,\ P_{02}'(z)=0,\ P_{11}'(z)=0$$

Уравнения, описывающие фоновые слагаемые скорости:

$$\begin{gathered}
U_0''(z)=-2k^2\delta^2\left(W(z)ctg\varphi-V_0(z)\right)+\delta^2\,\mathrm{Re}\left[P_{10}(z)+U_0(z)\left(\varepsilon(z)+\gamma_1(z)\right)+V_0(z)\left(\gamma_2(z)+\Omega(z)\right)+W(z)U_0'(z)\right],\\
V_0''(z)=2k^2\delta^2U_0(z)+\delta^2\,\mathrm{Re}\left[P_{01}(z)+V_0(z)\left(\varepsilon(z)-\gamma_1(z)\right)-U_0(z)\left(\gamma_2(z)-\Omega(z)\right)+W(z)V_0'(z)\right].
\end{gathered}\qquad(8)$$

Исследуем решение системы (6), (7), описывающее адвективное течение жидкости, полагая $W(z)=0$. Тогда из уравнений (6) получим ε(z)=0. Уравнение, описывающие скорость изменения площади элемента жидкости, превращается в алгебраическое тождество:

$$k^2\Omega(z)+\mathrm{Re}\left[P_{20}(z)+P_{02}(z)+\gamma_1^2(z)+\gamma_2^2(z)-\Omega^2(z)\right]=0\qquad(9)$$

которое связывает искомые функции γ_1 , γ_2 , Ω, P_{20}, P_{02} , P_{11} и является условием совместности. Уравнения, описывающие сдвиговые слагаемые компонент скорости и вращение элемента жидкости примут вид:

$$\gamma_1''(z)=-2\delta^2k^2\gamma_2(z)+\delta^2\,\mathrm{Re}\left(P_{20}(z)-P_{02}(z)\right),\quad\gamma_2''(z)=2\delta^2k^2\gamma_1(z)+\delta^2\,\mathrm{Re}\,P_{11}(z),\quad\Omega''(z)=0\qquad(10)$$

Здесь и далее будем обозначать $k^2=\sin\varphi/(2\,Ek)$. Общее решение системы уравнений (10) имеет вид:

$$\begin{gathered}
\gamma_1(z)=-\frac{\mathrm{Re}\,P_{11}^0}{2k^2}+\exp(k\delta z)\left(C_2\cos(k\delta z)+C_1\sin(k\delta z)\right)+\exp(-k\delta z)\left(C_4\cos(k\delta z)+C_3\sin(k\delta z)\right)\\
\gamma_2(z)=-\frac{\mathrm{Re}\left(P_{20}^0-P_{02}^0\right)}{2k^2}+\exp(-k\delta z)\left(C_3\cos(k\delta z)-C_4\sin(k\delta z)\right)-\exp(k\delta z)\left(C_1\cos(k\delta z)+C_2\sin(k\delta z)\right)\\
\Omega(z)=C_5z+C_6
\end{gathered}\qquad(11)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 - произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (2), (3).

Простая проверка показывает, что условие совместности (9) при подстановке решения (11) будет выполняться только при условии, что произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 обращаются в ноль и $P_{20}^0=0$, $P_{02}^0=0$, $P_{11}^0=0$. Но тогда класс решений (5) сводится к классу однородных решений

$$V_x=U_0(z),\quad V_y=V_0(z),\quad V_z=0,\quad P=P_0(z)+xP_{10}(z)+yP_{01}(z)$$

Решение, описывающее адвективное течение Экмана, может принадлежать только классу однородных решений и касательные напряжения должны иметь вид $\tau_x=\tau_{10}$, $\tau_y=\tau_{20}$.

3. Влияние малых возмущений граничных условий.

Рассмотрим малые возмущения граничных условий (10) на свободной поверхности. Будем считать, что касательные напряжения имеют вид $\tau_x=\tau_{10}+\mu(x\,\tau_{11}^1+y\,\tau_{12}^1)$, $\tau_y=\tau_{20}+\mu(x\,\tau_{21}^1+y\,\tau_{22}^1)$

$$\begin{gathered}
U_0=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mU_0^m(z),\ V_0=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mV_0^m(z),\ \gamma_1=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\gamma_1^m(z),\ \gamma_2=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\gamma_2^m(z),\ \varepsilon=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\varepsilon^m(z),\\
\Omega=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\Omega^m(z),\quad P_0=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mP_0^m(z),\quad P_{ij}=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mP_{ij}^m(z)
\end{gathered}\qquad(12)$$

Подставив решения в виде отрезков рядов (12) в системы уравнений (6), (7), (8) и приравняв коэффициенты при равных степенях параметра μ , получим системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения систем (6), (7), (8) разбиваются на пары однотипных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Каждая пара уравнений интегрируется независимо от остальных. Уравнения первого приближения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1^{1''}=-2k^2\delta^2\gamma_2^1+\mathrm{Re}\,\delta^2\left(P_{20}^1-P_{02}^1\right) &&\gamma_2^{1''}=2k^2\delta^2\gamma_1^1+\mathrm{Re}\,\delta^2P_{11}^1\\
&\Omega^{1''}=-2k^2\delta^2\varepsilon^1 &&\varepsilon^{1''}=-2k^2\delta^2\Omega^1+2\,\mathrm{Re}\,\delta^2\left(P_{20}^1+P_{02}^1\right)\\
&W^{1'}+2\varepsilon^1=0 &&W^{1''}=-2k^2\delta\,ctg\varphi U_0^1(z)+\mathrm{Re}\,P_0^{1'}(z)\\
&P_{10}^{1'}=2\frac{\delta k^2}{\mathrm{Re}}ctg\varphi\left(\varepsilon^1+\gamma_1^1\right) &&P_{01}^{1'}=2\frac{\delta k^2}{\mathrm{Re}}ctg\varphi\left(\Omega^1+\gamma_2^1\right)
\end{aligned}$$

Ниже приведены результаты вычислений параметров относительного движения жидкости при различных значениях граничных условий.

Профили компонент скорости изменения площади, скорости вращения и вертикальной компоненты скорости при значениях параметров:
Коэффициенты давления $P_{20}^1=1$, $P_{02}^1=1$, P_{11}^1 =0 , $\tau_{ij}^1=0$, Gr =10.0, k =100.0, δ=0.1, $\varphi=\pi/3$.
Сдвиговые слагаемые компонент скорости γ_1^1,γ_2^1 равны нулю, но переменные ε^1, Ω^1, W^1 отличны от нуля.

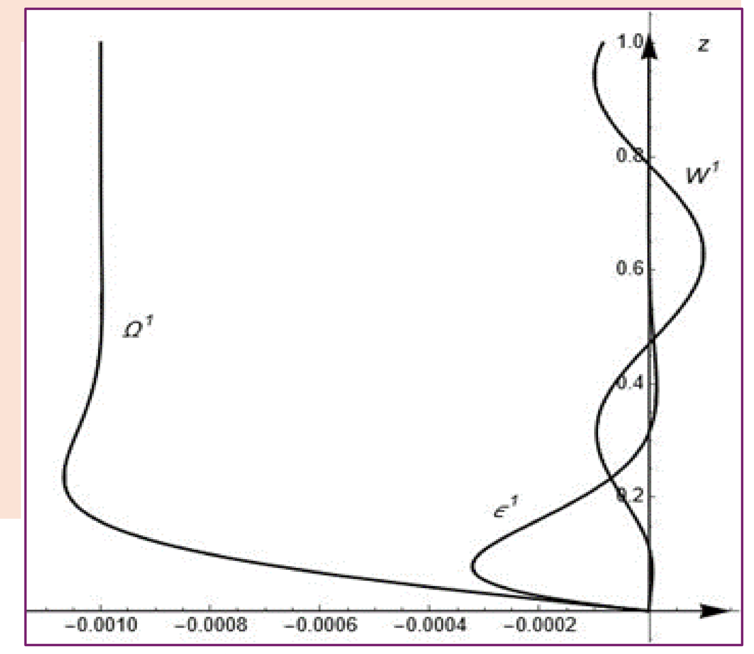

Рис.1. Профили компонент скорости изменения площади, скорости вращения и вертикальной компоненты скорости

$P_{20}^1=0$, $P_{02}^1=0$, $P_{11}^1=0$, τ_{11}=1, τ_{21}=1, $\tau_{22}=-1$, τ_{12}=0, Gr =10.0, k = 100.0, δ=0.1, $\varphi=\pi/3$

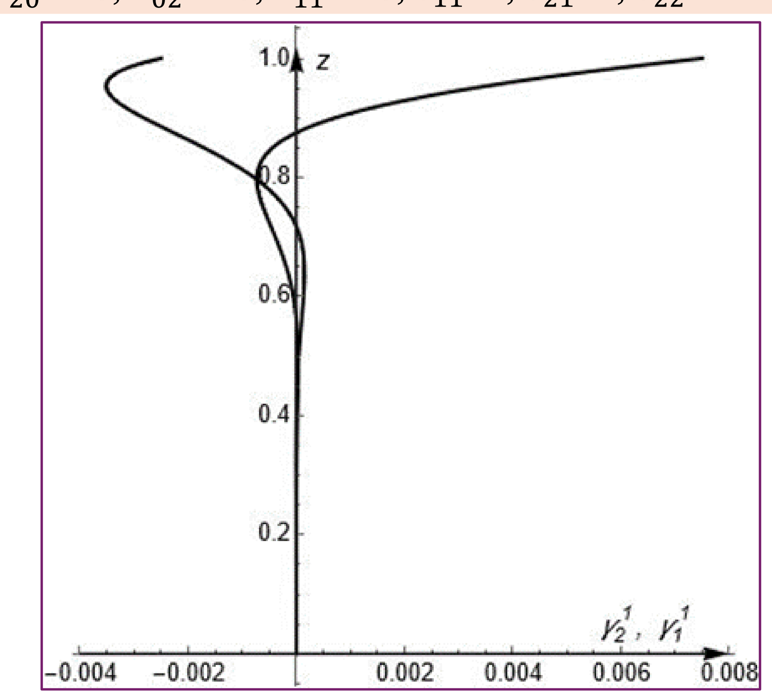

Рис. 2. Профили компонент скорости сдвиговых деформаций.

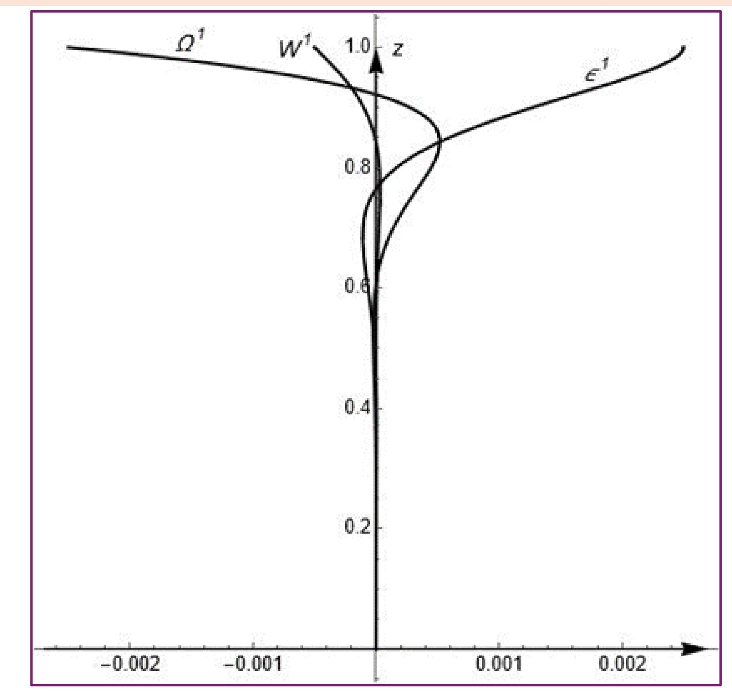

Рис. 3. Профили компонент скорости изменения площади, скорости вращения и вертикальной компоненты скорости

Литература

1. Сидоров А.Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции. Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды. УНЦ АН СССР. Сборник научных трудов. – НЦ АН СССР - Свердловск, 1981. – С. 101–117.
2. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственный переменных// ТОХТ, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.
3. Ekman V. W. On the Influence of the Earths Rotation on Ocean Currents // Arkiv for matematic, Asrtonomi, och Fysic. Band 2. 1905. T. 11. C. 1-53.
4. Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости// Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2018, том 54, № 2, с. 213–220.
5. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. - Пермь, 2006. - 155 с.
6. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. - Киров: ВятГУ, 2011. - 207 с.
7. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции. Сборник научных трудов. 2013. Т.9. № 3. С. 3–9.
8. Должанский Ф.В. Лекции по геофизической гидродинамике. М.: ИВМ РАН, 2006. 378 с.
9. B.M. Boubnov and G.S. Golitsyn. Convection in rotating fluids. Kluwer Academic Publishers, 1995.
10. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.:Мир, 1984. т. 1,2.