

# ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ РЕАГИРУЮЩИХ СИСТЕМ

Нефедова О.А.<sup>а)</sup>, Спевак Л.Ф.<sup>б)</sup>

ИМАШ УрО РАН, д. 34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620034, Российская Федерация  
e-mail: <sup>а)</sup>nefedova@imach.uran.ru, <sup>б)</sup>lfs@imach.uran.ru

**Аннотация.** Работа посвящена разработке алгоритма и программы для решения системы двух уравнений параболического типа. Предложен алгоритм численного решения, основанный на комбинации метода граничных элементов и метода коллокаций. Алгоритм реализован в виде программы, написанной на языке программирования C++. Организация параллельных вычислений построена с использованием открытого стандарта OpenMP. Для верификации алгоритма и программы решены тестовые задачи.

**Постановка краевой задачи.** В работе рассмотрены краевые задачи для системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta u = F(u, v), \\ \Delta v = G(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

в двумерной области  $V$  с заданными на ее границе  $S = S_1 \cup S_2$  граничными условиями:

$$u|_{x \in S_1} = u^*(\mathbf{x}), \quad v|_{x \in S_1} = v^*(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{x \in S_2} = p^*(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{x \in S_2} = q^*(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x, y)$  – точка на плоскости,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе  $S$ .

**Алгоритм решения.** Решение задачи представляется в виде суммы двух функции

$$u(\mathbf{x}) = u_p(\mathbf{x}) + u_h(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = v_p(\mathbf{x}) + v_h(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где  $(u_p(\mathbf{x}), v_p(\mathbf{x}))$  – частное решение системы (1), а  $(u_h(\mathbf{x}), v_h(\mathbf{x}))$  – решение краевой задачи для однородной системы

$$\begin{cases} \Delta u_h = 0, \\ \Delta v_h = 0 \end{cases} \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_h|_{x \in S_1} &= u^*(\mathbf{x}) - u_p(\mathbf{x}), \quad v_h|_{x \in S_1} = v^*(\mathbf{x}) - v_p(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}}|_{x \in S_2} &= p^*(\mathbf{x}) - \frac{\partial u_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}, \quad \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{n}}|_{x \in S_2} = q^*(\mathbf{x}) - \frac{\partial v_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача (1), (2) решена итерационно. Задача (4), (5) на каждой итерации решается МГЭ (для каждой функции отдельно). Частное решение  $(u_p(\mathbf{x}), v_p(\mathbf{x}))$  ищется с помощью разложения правых частей системы уравнений (1) по системе РБФ.

**Программная реализация.** Программа, реализующая представленный алгоритм, была написана на языке программирования C++ с использованием стандарта OpenMP. Работа программы была протестирована сравнением результатов расчетов с точными решениями.

**Заключение.** Предложен численный алгоритм решения системы двух уравнений параболического типа и выполнена его программная реализация. Результаты расчетов показали стабильную сходимость и корректную работу представленного метода.

**Пример.** Исследована следующая система уравнений параболического типа

$$\begin{cases} \Delta u = -2 \cdot v^{-2/3}, \\ \Delta v = 12 \cdot \exp(u). \end{cases}$$

Здесь  $1 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 2$ . Результаты расчетов сравнивались с точным решением  $u(x, y) = \ln(x + y)$ ,  $v(x, y) = (x + y)^3$ . В табл. 1 приведены относительные погрешности численного решения, рассчитанного вдоль отрезка  $[(1, 1.5), (2, 1.5)]$ , параллельного оси абсцисс. На рис. 1 представлено сравнение численного и точного решений.

Таблица 1. Относительные погрешности численного решения задачи, рассчитанные вдоль отрезка  $[(1, 1.5), (2, 1.5)]$

$(x, y)$	(1.15, 1.5)	(1.25, 1.5)	(1.35, 1.5)	(1.45, 1.5)	(1.55, 1.5)	(1.65, 1.5)	(1.75, 1.5)	(1.85, 1.5)
$\delta u$	$5.1 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	0	$8.9 \cdot 10^{-7}$	$8.7 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$8.3 \cdot 10^{-7}$
$\delta v$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$6.9 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$

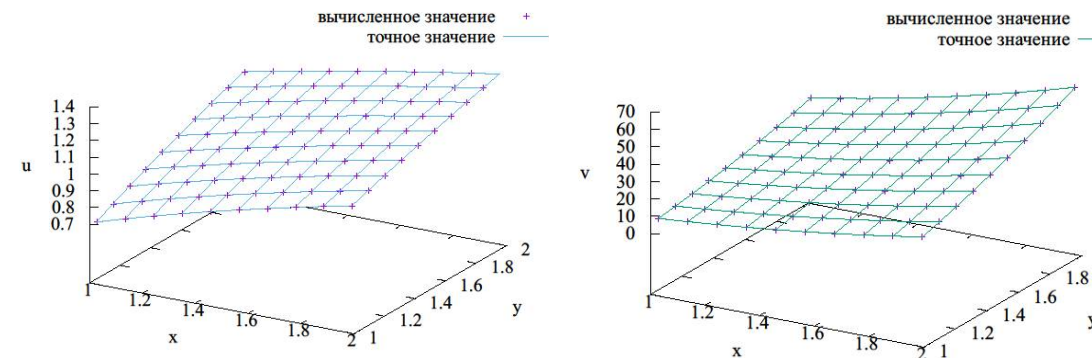


Рис. 1. Сравнение численного и точного решений