

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ, ПОРОЖДЕННОЙ КРАЕВЫМ РЕЖИМОМ НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ

А. Л. Казаков^{1,2}, Л. Ф. Спевак¹

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук

Постановка задачи

Объектом исследования данной статьи является нелинейное (квазилинейное) уравнение теплопроводности с источником (стоком) [1, 2]

$$T_t = (k(T)T_x)_x + H(T), \quad (1)$$

где t – время, x – пространственная координата, T – искомая функция (температура), $H(T)$ – функция источника (стока). Будем полагать, что $k(0)=0$, $H(0)=0$. Пусть функция $k(T)$, представляющая собой зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, является монотонной, достаточно гладкой, и обратная к ней функция имеет ненулевую производную. Тогда подстановкой $u = k(T)$ уравнение (1) приводится к виду

$$u_t = uu_{xx} + F(u)u_x^2 + h(u). \quad (2)$$

Здесь $F(u) = \frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} + 1$, $h(u) = \frac{H(\varphi(u))}{\varphi'(u)}$, $T = \varphi(u)$ – функция, обратная к $u = k(T)$. Будем считать также, что $F(u) > 0$. Подобное справедливо, например, для степенной функции $K(T) = T^\sigma$, $\sigma > 0 - \text{const}$, этот случай является одним из наиболее популярных в литературе, и тогда (2) становится обобщенным уравнением пористой среды (the generalized porous medium equation) [1]. В отечественной литературе оно иногда называется нелинейным уравнением теплопроводности с источником со степенными нелинейностями [2].

Поскольку в уравнении (2) при $u=0$ обращается в нуль коэффициент перед старшей производной, то имеет место вырождение параболического типа уравнения, что является причиной существования решений типа тепловой (диффузионной, фильтрационной) волны, распространяющейся с конечной скоростью по нулевому фону [3 – 6].

В предыдущих исследованиях авторов в основном рассматривался случай степенной функции $k(T)$. Были доказаны теоремы существования и единственности аналитического решения типа тепловой волны и разработаны алгоритмы численного решения [7 – 10], основанные на методе граничных элементов (МГЭ) [11, 12] и методе двойственной взаимности (МДВ) [13 – 15] с использованием радиальных базисных функций (РБФ) [16 – 18], а также построены классы точных решений для верификации расчетов [19, 20]. Подробный обзор подходов авторов к численным и аналитическим исследованиям уравнения (2) при степенной функции $k(T)$ приведен в статье [21]. В работах [19, 22] исследовано решение уравнения (2) в случае произвольного вида функции $k(T)$ при заданном уравнении движения фронта тепловой волны:

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad (3)$$

где $a(0)=0$, $a'(0) > 0$.

В данной работе изучается вопрос построения решения уравнения (2) при краевом условии, заданном на подвижной границе:

$$u|_{x=g(t)} = f(t), \quad (4)$$

где $g(0)=0$, $f(0)=0$, $g(t)$ и $f(t)$ – непрерывно дифференцируемые в окрестности нуля функции, $g'(0) > 0$, $f'(0) > 0$.

Теорема существования и единственности

Сформулируем и докажем основную теорему данной работы, которая обеспечивает существование и единственность решения задачи (2), (4) в классе аналитических функций. Предваряя формулировку теоремы, укажем, что под аналитической функцией в точке мы понимаем функцию, которая совпадает в некоторой окрестности точки со своим тейлоровским разложением.

Теорема. Пусть в задаче (2), (4) функции $F(u)$, $h(u)$ являются аналитическими в точке $u=0$, функции $f(t)$, $g(t)$ являются аналитическими в точке $t=0$ и справедливы соотношения $F(0) > 0$, $h(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f(0) = 0$, $g'(0) > 0$, $f'(0) > 0$. Тогда задача (2), (4) при выборе направления движения фронта тепловой волны имеет единственное аналитическое решение в точке $t = 0$, $x = 0$.

Доказательство теоремы имеет аналоги в ранее опубликованных работах авторов (см. [9, 10]), поэтому мы ограничимся здесь изложением его общей схемы. Обоснование разбивается на два этапа.

Первый этап состоит в том, что строится решение в виде формального ряда по степеням переменных t , $z = x - g(t)$. При этом на первом шаге возникает квадратное уравнение, которое в условиях теоремы имеет два действительных корня. Выбор одного из них определяет направление движения фронта тепловой волны. Дальнейшее построение проводится индукцией по суммарному номеру коэффициентов, причем на каждом шаге необходимо решать трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений [23] для которой не выполнено условие диагонального преобладания. Тем не менее, в условиях теоремы определители этих систем оказываются отличными от нуля, за счет чего коэффициенты ряда определяются однозначно.

Второй этап заключается в доказательстве сходимости построенных рядов. Суть его состоит в том, что посредством нескольких нетривиальных замен задача (2), (4) сводится к задаче вида (2), (3) (уравнение, конечно, отличается, но сохраняет порядок и тип), причем неизвестный фронт тепловой волны $x = a(t)$ определяется при решении отдельного дифференциального уравнения. В свою очередь, для преобразованной задачи, которая, заметим, является характеристической задачей Коши [6], строится мажорантная задача, имеющая тип Ковалевской и подпадающая под действие теоремы Коши-Ковалевской [24]. Можно без труда убедиться, что в условиях теоремы $u(0,0)$, $u_t^2(0,0) + u_x^2(0,0) > 0$, откуда по непрерывности следует, что в окрестности начал координат существует линия $x = a(t)$, $a(0) = 0$, на которой выполнено условие $u|_{x=a(t)} = 0$. Таким образом, построенное решение вкупе с тривиальным $u \equiv 0$ образует тепловую волну, причем $x = a(t)$ – это ее фронт.

Построение численного решения

Поскольку аналитическое решение в виде ряда определено лишь в окрестности границы, на которой задано краевое условие, мы всегда в рамках комплексных исследований ставим вопрос о построении решения на заданном конечном промежутке времени. В качестве основы для построения нового алгоритма численного решения задачи (2), (4) опишем кратко подход к решению задачи (2), (3).

Пусть требуется найти решение задачи (2), (3) при $t \in [0, T]$. В каждый момент времени t решение, имеющее вид тепловой волны, представляет из себя совокупность нетривиального решения $u(t, x)$, $x \in [0, a(t)]$, и тривиального решения в области $x > a(t)$, состыкованных вдоль нулевого фронта тепловой волны $x = a(t)$. Решение строится по шагам по времени. На каждом шаге $t_k = kh$ решается краевая задача для уравнения Пуассона

$$u_{xx} = \frac{1}{u} (u_t - F(u)u_x^2 - h(u)), \quad (5)$$

$$u|_{x=L} = 0, \quad (6)$$

$$u_x|_{x=L} = -\frac{a'(t_k)}{F(0)} \quad (7)$$

на отрезке $x \in [0, L]$, где $L = a(t_k)$, условие (7) следует из условия (6).

Задача (5) – (7) решается методом граничных элементов итерационно, при нулевом начальном приближении. Для сведения всех расчетов в граничные точки, в соответствии с МДВ, правая часть уравнения (5) на каждой итерации разлагается по системе РБФ [16, 17]. Использование РБФ обеспечивает устойчивую сходимость итерационных процедур.

Альтернативным подходом к решению задачи (5) – (7) может быть определение с помощью РБФ частного решения уравнения (5). Такой подход применяется в сочетании как с МГЭ [17], так и с другими методами, в частности, с методом коллокаций [25]. Представим решение (5) – (7) в виде

$$u(t_k, x) = v(x) + w(x), \quad (8)$$

где $v(x)$ – частное решение уравнения (5) в момент t_k , $w(x)$ – решение следующей краевой задачи:

$$w'' = 0, \quad (9)$$

$$w|_{x=L} = -v(L), \quad (10)$$

$$w'|_{x=g(t_k)} = -\frac{a'(t_k)}{F(0)} - v'(L). \quad (11)$$

Поскольку правая часть уравнения (5) зависит от искомой функции, решение вновь строится итерационно, в следующей последовательности:

$$v_0 \equiv 0, \quad (12)$$

$$w_n = \left(\frac{a'(t_k)}{F(0)} + v_n'(L) \right) (L - x) - v_n(L), \quad (13)$$

$$u_n = v_n + w_n, \quad (14)$$

$$v_{n+1}'' = \frac{1}{u_n} (u_{n,t} - F(u_n)(u_n')^2 - h(u_n)), \quad (15)$$

где u_n , v_n и w_n – n -е итерации решений. Уравнение (15) решается методом коллокаций с помощью разложения правой части по РБФ:

$$\frac{1}{u_n} (u_{n,t} - F(u_n)(u_n')^2 - h(u_n)) = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(x). \quad (16)$$

Здесь $\varphi^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(|x - x_k|)$ – РБФ, x_1, \dots, x_K – точки коллокации, расположенные на отрезке $[0, L]$. Для каждой $\varphi^{(k)}(x)$ существует функция $\psi^{(k)}(x)$, такая что $d^2\psi^{(k)}/dx^2 = \varphi^{(k)}$.

Производная по времени вычисляется методом конечных разностей. Коэффициенты $\alpha_{n+1}^{(k)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{u_n} \left(u_{n,t} - F(u_n)(u_n')^2 - h(u_n) \right) \Big|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(x_i), \quad i = 1, \dots, K. \quad (17)$$

Тогда

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \Psi^{(k)}(x). \quad (18)$$

Итерационный процесс останавливается, когда итерации u_{n+1} и u_n достаточно близки, и в качестве решения задачи (2), (3) в момент $t = t_k$ принимается непрерывно дифференцируемая по x функция

$$u(t_k, x) = v_{n+1}(x) + w_{n+1}(x). \quad (19)$$

Перейдем теперь к решению задачи (2), (4) на заданном промежутке $t \in [0, T]$. На шаге $t = t_k$ требуется решить на отрезке $x \in [0, L]$ уравнение (5) при граничном условии

$$u \Big|_{x=g(t_k)} = f(t_k). \quad (20)$$

Применение алгоритма (8) – (19), так же как и алгоритма МГЭ, для решения задачи (5), (20) невозможно. Во-первых, значение $L = a(t_k)$ неизвестно, поскольку функция $a(t)$ теперь не задана граничным условием. Таким образом, неизвестна область решения задачи. Во-вторых, мы имеем лишь одно граничное условие. В связи с этим, решение будем строить в два этапа следующим образом.

Этап 1. Решим задачу (2), (4) на отрезке $x \in [l, L]$, где $l = g(t_k)$.

Пусть функция $f(t)$ монотонна при $t \in [0, T]$. Тогда функция $u(t_k, x)$ однозначна на отрезке $[l, L]$. Рассмотрим обратную к ней функцию $x = x(t_k, u)$, $u \in [0, p]$, $p = f(t_k)$. Уравнение (2) для этой функции имеет следующий вид:

$$x_t x_u^2 = u x_{uu} - F(u) x_u - H(u) x_u^3, \quad (21)$$

а соответствующее уравнение Пуассона

$$x_{uu} = \frac{1}{u} (x_t x_u^2 + F(u) x_u + H(u) x_u^3). \quad (22)$$

Таким образом, проведенная замена переменных привела к уравнению (22) для новой искомой функции в известной области $u \in [0, l]$. Значение этой функции при $u = 0$ соответствует неизвестному положению нулевого фронта в рассматриваемый момент

$$x \Big|_{u=0} = a(t_k). \quad (23)$$

Сформулируем граничные условия для уравнения (22). Из условия (4) следует:

$$x \Big|_{u=p} = l. \quad (24)$$

Из условия (7) следует условие для производной:

$$x_u \Big|_{u=0} = - \frac{F(0)}{a'(t_k)}. \quad (25)$$

Удовлетворить точно условие (25) невозможно, поскольку функция $a(t)$ неизвестна. Используя квадратичную аппроксимацию этой функции на промежутке $t \in [t_{k-1}, t_k]$, уравнение (25) можно привести к следующему разностному виду [10]:

$$\frac{2(x(t_k, 0) - x(t_{k-1}, 0))}{h} = - \frac{F(0)}{x_u(t_k, 0)} - \frac{F(0)}{x_u(t_{k-1}, 0)}. \quad (26)$$

Уравнение (26) связывает значения искомой функции и ее производной на текущем шаге t_k и предыдущем шаге t_{k-1} . Для использования этого уравнения на первом шаге необходимо знать эти значения в начальный момент $t = 0$. Очевидно, что $x(0, 0) = 0$. Для нахождения $x_u(0, 0)$ возьмем полную производную по времени в условии (24):

$$(x_t + x_u f'(t))|_{u=f(t)} = g'(t). \quad (27)$$

Отсюда, при $u = f(t)$,

$$x_t = -x_u f'(t) + g'(t). \quad (28)$$

Подставим (28) в уравнение (21):

$$(-x_u f'(t) + g'(t))x_u^2 = ux_{uu} - F(u)x_u - H(u)x_u^3. \quad (29)$$

Тогда при $t = 0$, $u = f(0) = 0$ имеем

$$f'(0)x_u^2(0,0) - g'(0)x_u(0,0) - F(0) = 0. \quad (30)$$

В принятых ранее предположениях квадратное уравнение (30) имеет один положительный и один отрицательный действительные корни. Поскольку в рассматриваемой постановке $x_u < 0$, искомое значение определяется равенством

$$x_u(0,0) = \frac{g'(0) - \sqrt{[g'(0)]^2 + 4f'(0)F(0)}}{2f'(0)}. \quad (31)$$

Таким образом, уравнение (26) связывает граничные значения искомой функции и ее производной для уравнения (22) в момент t_k :

$$\left(\frac{2x(t_k, u)}{h} + \frac{F(0)}{x_u(t_k, u)} \right) \Big|_{u=0} = \frac{2x(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{F(0)}{x_u(t_{k-1}, 0)} = q, \quad (32)$$

и мы имеем второе граничное условие для уравнения (22).

Решение задачи (22), (24), (32) будем искать в виде, аналогичном (8):

$$x(t_k, u) = y(u) + z(u), \quad (33)$$

где $y(u)$ – частное решение уравнения (22) в момент t_k , $z(u)$ – решение следующей краевой задачи:

$$z'' = 0, \quad (34)$$

$$z|_{u=p} = l - y(p), \quad (35)$$

$$\frac{2(y(0) + z)}{h} + \frac{F(0)}{y'(0) + z'|_{u=0}} = q. \quad (36)$$

При известном $y(u)$ решение задачи (34) – (36) определяется однозначно:

$$z(u) = a(u - p) + l - y(p), \quad (37)$$

где a – корень квадратного уравнения, к которому сводится условие (36), соответствующий выбранному направлению движения нулевого фронта.

Полученные соотношения позволяют теперь применить для решения задачи (22), (24), (32) итерационную процедуру, подобную (12) – (15). Очередную итерацию функции $y(u)$ будем определять через разложение правой части уравнения (22) по РБФ, аналогично (16) – (18). В результате итерационного процесса мы получим непрерывно дифференцируемое по u решение $x(t_k, u)$. Непрерывность позволяет определить без потери точности обратную функцию $u(t_k, x)$ – решение задачи (2), (4) на отрезке $x \in [l, L]$.

Этап 2. Решим теперь задачу (2), (4) на отрезке $x \in [0, l]$.

Из решения на первом этапе на каждом шаге t_k известны значения искомой функции и ее производной в точке $x = l$, $u(t_k, l)$ и $u_x(t_k, l)$. Следовательно, мы можем сформулировать краевую задачу для уравнения (5) на отрезке $[0, l]$ с граничными условиями

$$u|_{x=l} = u(t_k, l), \quad (38)$$

$$u_x|_{x=l} = u_x(t_k, l). \quad (39)$$

Задача (5), (38), (39) абсолютно аналогична задаче (5) – (7) и может быть решена с помощью алгоритма (8) – (18). Таким образом, мы найдем непрерывно дифференцируемое по x решение задачи (2), (4) на отрезке $[0, l]$, а с учетом Этапа 1 – на отрезке $[0, L]$.

Пример

Для верификации предложенного алгоритма рассмотрим задачу с известным точным решением. Пусть в уравнении (2) $F(u) = 1/\sigma$, $h(u) = u$, тогда следующая функция является его точным решением:

$$U(t, x) = ke^t \left(\frac{k}{\sigma} (e^t - 1) - x \right). \quad (40)$$

Здесь σ – положительная константа, k – произвольное число, отличное от нуля. Нулевой фронт решения (40) определяется функцией

$$x = a(t) = \frac{k}{\sigma} (e^t - 1). \quad (41)$$

Численные решения задачи (2), (4) были построены при $\sigma = 5$, $k = 0.1$,

$$g(t) = \frac{a(t)}{4} = \frac{k}{4\sigma} (e^t - 1), \quad f(t) = U(t, x)|_{x=g(t)} = \frac{3k^2}{4\sigma} e^t (e^t - 1). \quad (42)$$

На рисунке 1 приведено сравнение точного решения (40) и решения по предложенному новому алгоритму при $h = 0.01$. В качестве РБФ были приняты функции $\varphi^{(k)}(x) = |x - x_k|$.

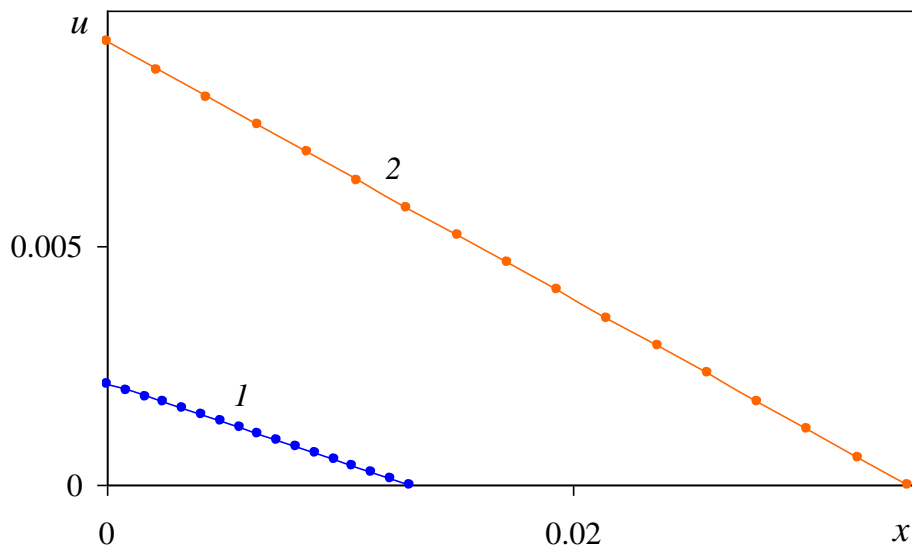


Рис. 1. Сравнение численного и точного решений: 1 – $t = 0.5$, 2 – $t = 1$; линии – численное, точки – точное

В таблице 1 сравниваются погрешности численных решений на двух этапах при различных значениях шага по времени h . Полученные данные показывают сходимость предложенного алгоритма относительно шага по времени. Следует отметить улучшение устойчивости итерационных процедур по сравнению с ранее разработанным алгоритмом на основе МГЭ, а также незначительное повышение точности.

Таблица 1. Погрешности численных решений.

h	Этап 1	Этап 2
0.1	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
0.05	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.025	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
0.01	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$8.9 \cdot 10^{-5}$

Заключение

Представленная работа вносит вклад в развитие аналитических и численных методов построения решений нелинейных вырождающихся уравнений математической физики. Для квазилинейного уравнения теплопроводности с источником доказана оригинальная теорема существования и единственности решений, имеющих тип тепловой волны, распространяющейся по абсолютно холодному фону с конечной скоростью, и предложен эффективный приближенный метод их построения. Отличительной особенностью последнего является то, что он основан на использовании преобразования годографа с последующим применением разложения по радиальным базисным функциям в сочетании с методом коллокаций. Ранее авторы обычно применяли граничноэлементный подход. Предложенная новация позволила повысить точность и устойчивость счета, что подтверждается результатами вычислений.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-07-00407.

Литература

1. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford: Clarendon Press, 2007. – 648 p. – ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
2. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов – М. : Наука, 1987. – 476 с.
3. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // В кн.: Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. – М. : Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.
4. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 3. – С. 411–417.
5. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 667–704.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0103-X.
7. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2012. – Т. 5. – № 2. – С. 2–17.
8. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10–11. – P. 6918–6928. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026
9. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20. – № 1. – С. 119–129.
10. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф. Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59. – № 6. – С. 1047–1062. – DOI: 10.1134/S0044466919060085.
11. Banerjee P. K., Butterheld R. Boundary element methods in engineering science. – US : McGraw-Hill Inc., 1981. – 452 p. ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.
12. Brebbia C. A., Telles J. F. C., Wrobel L. C. Boundary Element Techniques. – Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. – 466 p. – ISBN 978-3-642-48862-7. – DOI: 10.1007/978-3-642-48860-3.

13. Nardini D., Brebbia C. A. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements // *Applied Mathematical Modelling*. – 1983. – Vol. 7, no. 3. – P. 157–162. – DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
14. Wrobel L. C., Brebbia C. A. Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction // In: *Finite elements in water resources VI*. Springer-Verlag: Berlin, Germany, 1986. – P. 801–811.
15. Tanaka M., Matsumoto T., Yang Q. F. Time-stepping boundary element method applied to 2-D transient heat conduction problems // *Appl. Math. Model.* – 1994. Vol. – 18. – P. 569–576. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(94\)90142-2](https://doi.org/10.1016/0307-904X(94)90142-2).
16. Powell M. J. D. The Theory of Radial Basis Function Approximation // In: Light W., ed. *Advances in Numerical Analysis*, Oxford Science Publications: Oxford, UK, 1992. – Vol. 2.
17. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 1999. – Vol. 23. – P. 285–296. – [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(98\)00087-3](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(98)00087-3).
18. Spevak L. F., Nefedova O. A. Solving a two-dimensional nonlinear heat conduction equation with degeneration by the boundary element method with the application of the dual reciprocity method // *AIP Conference Proceedings*. – 2016. – Vol. 1785, iss. 1. – P. 040077. – URL: <http://doi.org/10.1063/1.4967134>
19. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности [Electronic resource] // *Сибирские электронные математические известия*. – 2019. – Т. 16. – С 1057–1068. – DOI: 10.33048/semi.2019.16.073. – URL: – <http://semr.math.nsc.ru/v16ru.html> (accessed: 14.12.2021).
20. Kazakov A. L., Spevak L. F., Spevak E. L. On Numerical Methods for Constructing Benchmark Solutions to a Nonlinear Heat Equation with a Singularity [Electronic resource] // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2020. – Iss. 5. – P. 26-44. - DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044. - URL: http://dream-journal.org/issues/2020-5/2020-5_306.html. (accessed: 14.12.2021).
21. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the Numerical-Analytical Approaches to Solving a Nonlinear Heat Conduction Equation with a Singularity [Electronic resource] // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2018. – Iss. 6. – P. 100–116. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. – URL: http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html. (accessed: 14.12.2021).
22. Казаков А.Л., Спевак Л.Ф. Приближенные и точные решения вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности с произвольной нелинейностью // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. – 2020. – Т. 34. – С. 18-34. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18.
23. Баутин С. П., Казаков А. Л. *Обобщенная задача Коши и ее приложения*. Новосибирск: Наука, 2006. – 397 с. ISBN: 5-02-032540-6
24. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964. – 832 с.
25. Golberg M. A. Numerical evaluation of particular solutions in the BEM—a review // *Boundary Element Comm*. 1995. V. 6. P. 99–106.