



**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ И
НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

Просвиряков Е.Ю.

Институт машиноведения УрО РАН

evgen_pros@mail.ru



Система уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial t}V + (V, \nabla) \cdot V + 2\Omega \times V = -\nabla P + \nu \Delta V \quad \Omega = \frac{1}{2}(f_3, f_2, f_1)$$
$$\nabla \cdot V = 0 \quad (1) \quad \begin{aligned} f_1 &= 2\Omega \cos \varphi_1 \\ f_2 &= 2\Omega \cos \varphi_2 \\ f_3 &= 2\Omega \cos \varphi_3 \end{aligned}$$

- **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // **Труды Института математики УрО РАН. 2020.** Том 26 № 2. С. 79-87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87
- **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // **Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2020.** Т. 32. С. 33-48. DOI DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
- **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Исследование стратификации гидродинамических полей для слоистых течений вертикально завихренной жидкости // **DReaM. 2020.** Вып. 3. С. 29-46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.



Класс решений (класс Линя-Сидорова-Аристова):

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y$$

$$V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y$$

$$V_z = 0 \tag{2}$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y + P_{12}(z)xy + P_{11}(z)\frac{x^2}{2} + P_{22}(z)\frac{y^2}{2}$$



Переопределенная редуцированная система:

$$P_{11}' = 0, P_{12}' = 0, P_{22}' = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nu u_1'' &= u_1^2 + (u_2 - f_1)v_1 + P_{11}, \\ \nu u_2'' &= u_1 u_2 + (u_2 - f_1)v_2 + P_{12}, \\ \nu v_1'' &= u_1(v_1 + f_1) + v_1 v_2 + P_{12}, \\ \nu v_2'' &= u_2(v_1 + f_1) + v_2^2 + P_{22}, \\ u_1 + v_2 &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$P_1' = f_2 u_1 - f_3 v_1, \quad P_2' = f_2 u_2 - f_3 v_2; \quad (5)$$

$$\nu U'' = U u_1 + V(u_2 - f_1) + P_1, \quad \nu V'' = U(v_1 + f_1) + V v_2 + P_2; \quad (6)$$

$$P_0' = f_2 U - f_3 V. \quad (7)$$

Теорема.

Если существует такое $c \in R$, что выполняется равенство

$$c^2 f_1^2 + 2cf_1^3 - P_{11}^2 - 4P_{12}^2 - 2f_1^2 (P_{11} - P_{22}) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^2 = 0,$$

то переопределенная система (4) является разрешимой, при этом функции пространственные ускорения принимают постоянные значения:

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f_1}, \quad u_2 = \frac{P_{11} - P_{22} - f_1 c}{2f_1}, \quad v_1 = \frac{P_{11} - P_{22} + f_1 c}{2f_1}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f_1}.$$



$$P_1' = f_2 u_1 - f_3 v_1,$$

$$P_2' = f_2 u_2 - f_3 v_2;$$

Точное решение.

$$P_1 = \alpha_1 z + p_1, \quad P_2 = \alpha_2 z + p_2,$$

где $\alpha_1 = f_2 u_1 - f_3 v_1$, $\alpha_2 = f_3 u_1 + f_2 u_2$, а p_1, p_2 – постоянные интегрирования.

- Пусть $v_1 + f_1 = 0$.

Если $u_1 = 0$:

$$vU'' = Uu_1 + V(u_2 - f_1) + P_1,$$

$$vV'' = U(v_1 + f_1) + Vv_2 + P_2;$$

$$P_0' = f_2 U - f_3 V.$$

$$U = \frac{(u_2 - f_1)\alpha_2}{120v^2} z^5 + \frac{p_2(u_2 - f_1)}{24v^2} z^4 + \frac{(C_2(u_2 - f_1) + \alpha_1)}{6v} z^3 + \frac{(C_1(u_2 - f_1) + p_1)}{2v} z^2 + C_4 z + C_3;$$

$$P_0 = \frac{f_2 \alpha_2 (u_2 - f_1)}{720v^2} z^6 + \frac{f_2 p_2 (u_2 - f_1)}{120v^2} z^5 + \frac{f_2 (C_2 (u_2 - f_1) + \alpha_1) - f_3 \alpha_2}{24v} z^4 +$$

$$+ \frac{f_2 (C_1 (u_2 - f_1) + p_1) - f_3 p_2}{6v} z^3 + \frac{C_4 f_2 - C_2 f_3}{2} z^2 + (C_3 f_2 - C_1 f_3) z + C_5,$$



Если $u_1 > 0$:

$$V = \frac{\alpha_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz);$$

$$U = -\frac{\alpha_2(u_2 - f_1) + \alpha_1 u_1}{u_1^2} z - \frac{p_2(u_2 - f_1) + p_1 u_1}{u_1^2} - \frac{C_1(u_2 - f_1)}{2u_1} \sin(kz) - \frac{C_2(u_2 - f_1)}{2u_1} \cos(kz) +$$

$$+ C_3 \exp(-kz) + C_3 \exp(kz);$$

$$P_0 = -\frac{f_3 \alpha_2 u_1 + f_2((u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1)}{2u_1^2} z^2 - \frac{f_3 p_2 u_1 + f_2((u_2 - f_1)p_2 + p_1 u_1)}{u_1^2} z + C_5 -$$

$$- \frac{C_2(2f_3 u_1 + f_2(u_2 - f_1))}{2ku_1} \sin(kz) + \frac{C_1(2f_3 u_1 + f_2(u_2 - f_1))}{2ku_1} \cos(kz) -$$

$$- \frac{C_3 f_2}{k} \exp(-kz) + \frac{C_4 f_2}{k} \exp(kz).$$

$$\text{Здесь } k = \sqrt{\frac{|u_1|}{v}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{u_1}{v}}, & \text{если } u_1 \geq 0, \\ \sqrt{\frac{-u_1}{v}}, & \text{если } u_1 < 0. \end{cases}$$

Если $u_1 < 0$:

$$V = \frac{\alpha_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sinh(kz) + C_2 \cosh(kz);$$

$$U = -\frac{(u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1}{u_1^2} z - \frac{(u_2 - f_1)p_2 + p_1 u_1}{u_1^2} - \frac{C_1(u_2 - f_1)}{2u_1} \sinh(kz) - \frac{C_2(u_2 - f_1)}{2u_1} \cosh(kz) +$$

$$+ C_3 \sin(kz) + C_3 \cos(kz);$$

$$P_0 = -\frac{f_3 \alpha_2 u_1 + f_2((u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1)}{2u_1^2} z^2 - \frac{f_3 p_2 u_1 + f_2((u_2 - f_1)p_2 + u_1 p_1)}{u_1^2} z + C_5 -$$

$$- \frac{C_2(2f_3 u_1 + f_2(u_2 - f_1))}{2ku_1} \sinh(kz) - \frac{C_1(2f_3 u_1 + f_2(u_2 - f_1))}{2ku_1} \cosh(kz).$$



• Пусть $v_1 + f_1 \neq 0$.

Если $S=0$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\alpha_1(v_1 + f_1) - u_1\alpha_2}{120v^2} z^5 + \frac{p_1(v_1 + f_1) - u_1p_2}{24v^2} z^4 + C_4 z^3 + C_3 z^2 + C_2 z + C_1; \\ U &= \frac{u_1(\alpha_1(f_1 + v_1) - \alpha_2 u_1)}{120v^2(f_1 + v_1)} z^5 + \frac{u_1(p_1(f_1 + v_1) - p_2 u_1)}{24v^2(f_1 + v_1)} z^4 + \frac{6vC_4 u_1 + \alpha_1(f_1 + v_1) - \alpha_2 u_1}{6v(f_1 + v_1)} z^3 + \\ &+ \frac{2vC_3 u_1 + p_1(f_1 + v_1) - p_2 u_1}{2v(f_1 + v_1)} z^2 + \frac{(6vC_4 + C_2 u_1 - \alpha_2)}{f_1 + v_1} z + \frac{2vC_3 - p_2 + C_1 u_1}{f_1 + v_1}; \\ P_0 &= -\frac{(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1)(f_1 \alpha_1 + v_1 \alpha_1 - u_1 \alpha_2)}{720v^2(f_1 + v_1)} z^6 - \frac{(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1)(f_1 p_1 - p_2 u_1 + p_1 v_1)}{120v^2(f_1 + v_1)} z^5 + \\ &+ \frac{-6vC_4(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1) + f_2(f_1 \alpha_1 + v_1 \alpha_1 - u_1 \alpha_2)}{24v(f_1 + v_1)} z^4 + \\ &+ \frac{-2vC_3(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1) + f_2(f_1 p_1 - p_2 u_1 + p_1 v_1)}{6v(f_1 + v_1)} z^3 - \\ &- \frac{-6vC_4 f_2 + C_2(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1) + f_2 \alpha_2}{2(f_1 + v_1)} z^2 - \frac{-2vC_3 f_2 + f_2 p_2 + C_1(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1)}{f_1 + v_1} z + C_5 \end{aligned}$$

$$S = -\frac{u_1^2 + (u_2 - f_1)(v_1 + f_1)}{v^2}$$



Если $S > 0$:

$$V = C_1 \cosh(kz) \cos(kz) + C_2 \cosh(kz) \sin(kz) + C_3 \sinh(kz) \cos(kz) + C_4 \sinh(kz) \sin(kz) +$$

$$+ \frac{\alpha_1(v_1 + f_1) - u_1 \alpha_2}{Sv^2} z + \frac{p_1(v_1 + f_1) - u_1 p_2}{Sv^2};$$

$$U = \frac{(2k^2 v C_4 + C_1 u_1)}{f_1 + v_1} \cosh(kz) \cos(kz) + \frac{(-2k^2 v C_3 + C_2 u_1)}{f_1 + v_1} \cosh(kz) \sin(kz) +$$

$$+ \frac{(2k^2 v C_2 + C_3 u_1)}{f_1 + v_1} \sinh(kz) \cos(kz) + \frac{(-2k^2 v C_1 + C_4 u_1)}{f_1 + v_1} \sinh(kz) \sin(kz) +$$

$$+ \frac{f_1 u_1 \alpha_1 + u_1 v_1 \alpha_1 - Sv^2 \alpha_2 - u_1^2 \alpha_2}{Sv^2 (f_1 + v_1)} z + \frac{-Sv^2 p_2 + f_1 p_1 u_1 - p_2 u_1^2 + p_1 u_1 v_1}{Sv^2 (f_1 + v_1)};$$

$$P_0 = \frac{C_3 (f_2 (2k^2 v + u_1) - f_3 (f_1 + v_1)) + C_2 (f_2 (2k^2 v - u_1) + f_3 (f_1 + v_1))}{2k (f_1 + v_1)} \cosh(kz) \cos(kz) +$$

$$+ \frac{C_4 (f_2 (2k^2 v + u_1) - f_3 (f_1 + v_1)) - C_1 (f_2 (2k^2 v - u_1) + f_3 (f_1 + v_1))}{2k (f_1 + v_1)} \cosh(kz) \sin(kz) +$$

$$+ \frac{C_1 (f_2 (2k^2 v + u_1) - f_3 (f_1 + v_1)) + C_4 (f_2 (2k^2 v - u_1) + f_3 (f_1 + v_1))}{2k (f_1 + v_1)} \sinh(kz) \cos(kz) +$$

$$+ \frac{C_2 (f_2 (2k^2 v + u_1) - f_3 (f_1 + v_1)) - C_3 (f_2 (2k^2 v - u_1) + f_3 (f_1 + v_1))}{2k (f_1 + v_1)} \sinh(kz) \sin(kz) +$$

$$+ \frac{-(f_1 + v_1)(-f_2 u_1 + f_3 (f_1 + v_1)) \alpha_1 + (-f_2 (Sv^2 + u_1^2) + f_3 u_1 (f_1 + v_1)) \alpha_2}{2Sv^2 (f_1 + v_1)} z^2 -$$

$$\frac{Sv^2 f_2 p_2 + (-f_2 u_1 + f_3 (f_1 + v_1))(-p_2 u_1 + p_1 (f_1 + v_1))}{Sv^2 (f_1 + v_1)} + C_5.$$

здесь $k^4 = S/4$.



Если $S < 0$:

$$\begin{aligned} V &= C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + C_3 \cosh(kz) + C_4 \sinh(kz) + \\ &\quad + \frac{\alpha_1(v_1 + f_1) - u_1 \alpha_2}{Sv^2} z + \frac{p_1(v_1 + f_1) - u_1 p_2}{Sv^2}; \\ U &= \frac{C_1(u_1 - k^2 v)}{f_1 + v_1} \cos(kz) + \frac{C_2(u_1 - k^2 v)}{f_1 + v_1} \sin(kz) + \frac{C_3(u_1 + k^2 v)}{f_1 + v_1} \cosh(kz) + \frac{C_4(u_1 + k^2 v)}{f_1 + v_1} \sinh(kz) + \\ &\quad + \frac{u_1((f_1 + v_1)\alpha_1 - u_1 \alpha_2) - Sv^2 \alpha_2}{Sv^2(f_1 + v_1)} z + \frac{u_1(-p_2 u_1 + p_1(f_1 + v_1)) - Sv^2 p_2}{Sv^2(f_1 + v_1)}; \\ P_0 &= \frac{C_4(f_2(k^2 v + u_1) - f_3(f_1 + v_1))}{k(f_1 + v_1)} \cosh(kz) + \frac{C_3(f_2(k^2 v + u_1) - f_3(f_1 + v_1))}{k(f_1 + v_1)} \sinh(kz) + \\ &\quad + \frac{C_2(f_2(k^2 v - u_1) + f_3(f_1 + v_1))}{k(f_1 + v_1)} \cos(kz) - \frac{C_1(f_2(k^2 v - u_1) + f_3(f_1 + v_1))}{k(f_1 + v_1)} \sin(kz) + \\ &\quad + \frac{-(f_1 + v_1)(-f_2 u_1 + f_3(f_1 + v_1))\alpha_1 + (-f_2(Sv^2 + u_1^2) + f_3 u_1(f_1 + v_1))\alpha_2}{2Sv^2(f_1 + v_1)} z^2 - \\ &\quad - \frac{Sv^2 f_2 p_2 + (-f_2 u_1 + f_3(f_1 + v_1))(-p_2 u_1 + p_1(f_1 + v_1))}{Sv^2(f_1 + v_1)} z + C_5. \end{aligned}$$



Исследование разрешимости системы уравнений

тепловой конвекции.

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x,$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

$$u_1^2 + u_2 v_1 = \nu u_1'',$$

$$u_1 u_2 + u_2 v_2 = \nu u_2'',$$

$$u_1 v_1 + v_1 v_2 = \nu v_1'',$$

$$u_2 v_1 + v_2^2 = \nu v_2'',$$

$$u_1 + v_2 = 0;$$

$$u_1 T_1 + v_1 T_2 = \chi T_1'',$$

$$u_2 T_1 + v_2 T_2 = \chi T_2'';$$

$$P_1' = g\beta T_1,$$

$$P_2' = g\beta T_2;$$

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y,$$

$$V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y,$$

$$T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y,$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y.$$

$$Uu_1 + Vu_2 = -P_1 + \nu U'',$$

$$Uv_1 + Vv_2 = -P_2 + \nu V'';$$

$$UT_1 + VT_2 = \chi T_0'',$$

$$P_0' = g\beta T_0.$$



Теорема 1.

Переопределенная редуцированная система имеет нетривиальное точное решение в выбранном классе, являющееся точным решением системы уравнений тепловой конвекции, если пространственные ускорения удовлетворяют соотношениям:

$$u_1 = u \cos \vartheta \sin \vartheta, \quad u_2 = u \cos^2 \vartheta, \quad v_1 = -u \sin^2 \vartheta,$$

где u — функция, удовлетворяющая уравнению $u'' = 0$, а ϑ — некоторое число.

Теорема 2.

При любых значениях параметров u, ϑ , определяющих вид пространственных ускорений, редуцированная система имеет нетривиальное точное решение, притом единственное.



Пример.

$$V_x = U(z) + u(z)y, \quad V_y = V(z),$$
$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y; \quad T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y.$$

$$u'' = 0, \quad T_1'' = 0, \quad P_1' = g\beta T_1, \quad \chi T_2'' = uT_1, \quad P_2' = g\beta T_2,$$
$$\nu V'' = P_2, \quad \nu U'' = Vu + P_1, \quad \chi T_0'' = UT_1 + VT_2, \quad P_0' = g\beta T_0.$$

$$U(0) = V(0) = 0, \quad \eta U'(h) = \xi_1, \quad \eta V'(h) = \xi_2,$$
$$T_0(0) = 0, \quad T_1(0) = A, \quad T_2(0) = B,$$
$$T_0(h) = \vartheta, \quad T_1(h) = C, \quad T_2(h) = D,$$
$$P_0(h) = P_1(h) = P_2(h) = 0.$$

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. 2020. Т. 24, №3. С. 528–541.

DOI: 10.14498/vsgtu1770



$$T_1 = A + (C - A)Z;$$

$$\begin{aligned} T_0 = \vartheta Z + \frac{4Z(1-Z)}{12!\eta\nu^2\chi^3} \{ & -23760g\beta\eta\nu\chi^2h^5 \times \\ & \times [5A^2(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2)+ \\ & + 5AC(26+26Z-30Z^2+5Z^3+5Z^4-2Z^5)+ \\ & + C^2(82+82Z+82Z^2-58Z^3+5Z^4+5Z^5)] - \\ - 3g\beta\eta\nu\Omega^2h^9 [& 2A^2(2-Z)(912+1368Z+1596Z^2-3680Z^3+ \\ & + 1998Z^4+294Z^5-833Z^6+336Z^7-42Z^8)+ \\ & + AC(7851+7851Z+7851Z^2-27569Z^3+15397Z^4+ \\ & + 921Z^5-3479Z^6-14Z^7+756Z^8-168Z^9)+ \\ & + 2C^2(2088+2088Z+2088Z^2-4072Z^3-607Z^4+ \\ & + 1857Z^5-343Z^6-343Z^7+42Z^8+42Z^9)] - \\ - g\beta\eta\chi\Omega^2h^9 [& A^2(2-Z)(19456+29184Z-9512Z^2-7080Z^3+ \\ & + 3838Z^4-636Z^5-398Z^6+216Z^7-27Z^8)+ \\ & + AC(82985+82985Z-23935Z^2-14035Z^3+8141Z^4- \\ & - 637Z^5-637Z^6-142Z^7+243Z^8-54Z^9)+ \\ & + C^2(43268+43268Z+43268Z^2-10192Z^3-10192Z^4+ \\ & + 4592Z^5-358Z^6-358Z^7+27Z^8+27Z^9)] - \\ - 9979200h^3\nu^2\xi_1\chi^2 [& A(1+Z-Z^2)+C(1+Z+Z^2)] + \\ + 332640h^5\nu^2\xi_2\chi\Omega [& A(3+3Z+3Z^2-7Z^3+2Z^4)+ \\ & + C(3+3Z+3Z^2-2Z^3-2Z^4)] + \\ + 332640h^5\nu\xi_2\chi^2\Omega [& A(14+14Z-16Z^2-Z^3+2Z^4)+ \\ & + C(13+13Z+13Z^2-2Z^3-2Z^4)] \}. \end{aligned}$$

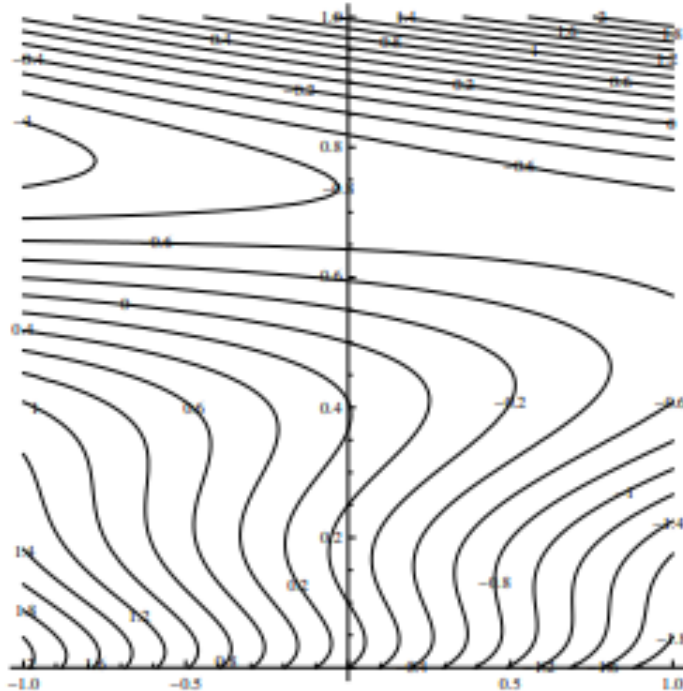


Figure. Isolines of the temperature T in the section $y = 0$

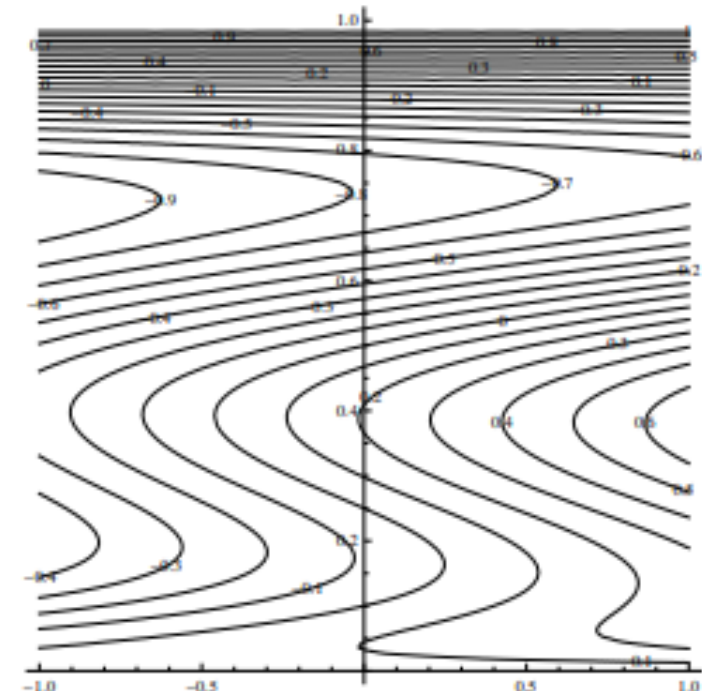


Figure. Isolines of the temperature T in the section $x = 0$

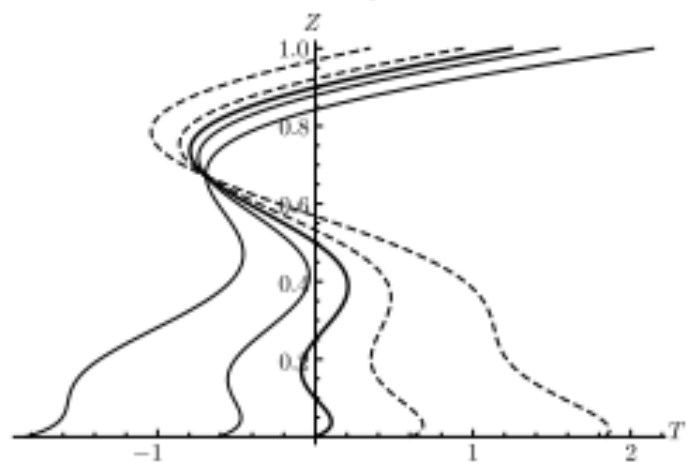


Figure. Zero isotherm in the section $y = 0$ for $x = 0.9, x = 0.3, x = 0, x = -0.3$ and $x = -0.9$ (from left to right)

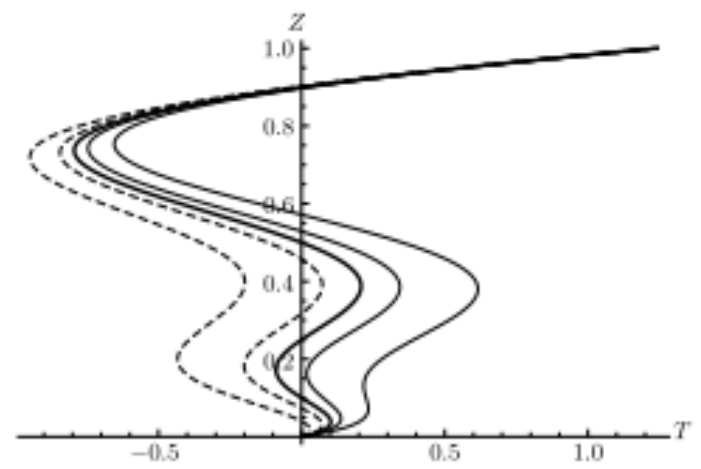


Figure. Zero isotherm in the section $x = 0$ for $y = -0.9, y = -0.3, y = 0, y = 0.3$ and $y = 0.9$ (from left to right)



Спасибо за внимание!